Τρίτη 20/10/20 Μάθημα 3ο.

Μέθοδος "κλάδου-φράγματος" (branch & bound, B & B).

Η απαρίθμηση όλων των λύσεων είναι πολύ αργή για τα περισσότερα προβλήματα.

Η B & B εκκινεί με τον ίδιο τρόπο όπως απαρίθμηση αλλά είναι δυνατή η αποφυγή μεγάλου μέρους της.

Η B & B θεωρείται μέθοδος εκκίνησης για όλες τις τεχνικές επίλυσης στον ακέραιο προγραμματισμό.

π.χ. $\max\ 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4$

$$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9$$

$$x_i \in \{0,1\},\ i=1,2,3,4.$$

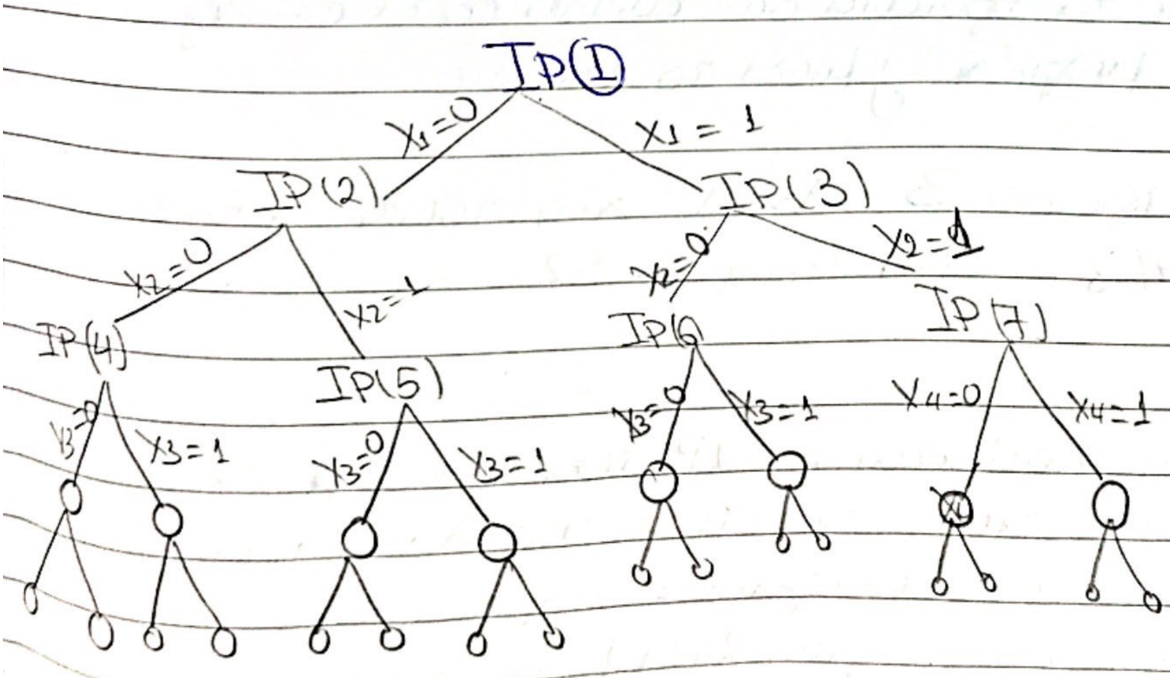
Πλήρης απαρίθμηση

Θεώρηση όλων των πιθανών τιμών των μεταβλητών απόφασης

n δυαδικές μεταβλητές: 2^n διαφορετικοί τρόποι

Ιδέα: Επαναληπτική διάσπαση του προβλήματος στα δυο

στην πρώτη επανάληψη, θεωρούμε χωριστά $x_1=0$ κ $x_1=1$



Παράλειψη / Διαγραφή υποδέντρου

Διαγράφουμε ένα υπόδεντρο αν
1) Έχει λυθεί το πρόβλ. ακερ. προγ. για τη ρίζα του υπόδεντρου
2) Έχει αποδειχθεί ότι η λύση στο πρόβλημα Α.Π. στη ρίζα του υπόδεντρου δεν μπορεί να είναι βέλτιστη

Γραμμική χαλάρωση του προβλήματος ακεραίου προγραμματισμού LP(1)
(παράλειψη περιορισμών $x_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,3,4$

$$\max\ 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4$$
$$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 9$$
$$0 \le x_i \le 1 \quad i=1,2,3,4.$$

LP(j) Γραμμική χαλάρωση του ΠΑΠ IP(j).

Επίλυση LP(1) ευρετικώς

Προϊόν i	1	2	3	4
Αξία/κιλό	24/8	2/1	20/5	4/4

Τοποθετούμε τα προϊόντα στο σακίδιο βάσει του λόγου Αξία/κιλό μέχρι να γεμίσει το σακίδιο

Βάζουμε το προϊόν 3, $x_3 = 1$ χωρητικότητα $9-5=4$
άρα $x_1 = 4/8$ αντικ. συναρ. $= 32$

Συνήθως όταν επιλύεται το LP, προκύπτουν μη ακέραιες λύσεις. Περιστασιακά, προκύπτει μια λύση η οποία ικανοποιεί όλους τους ακέραιους περιορισμούς:
Εάν η βέλτιστη λύση για LP(k) είναι εφικτή για IP(k)
Τότε είναι επίσης βέλτιστη για IP(k)

LP(4) $\max 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4$

s.t. $x_1=0,\ x_2=0$

$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 9$

$0 \le x_i \le 1,\ i=3,4$

Η λύση στο LP(4) $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=1,\ z=24$ είναι εφικτή για το IP(4) δεν μπορεί να υπάρξει μια λύση για το IP(4) με καλύτερη τιμή απο 24.

LP(15)

$\max 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4$

$x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1$

$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 9$

Αδυνατο $\Rightarrow$ αδυνατο IP(15)

Φράγματα:

Δεν επιλύεται άμεσα το IP(k) αλλά επιλύεται η χαλάρωση του LP(k) και χρησιμοποιείται για να οριστούν φράγματα.

$Z_{IP}(j)$ = βέλτιστη λύση για το IP(j)

$Z_{LP}(j)$ = βέλτιστη λύση για το LP(j).

$Z_{IP}(j) \le Z_{LP}(j)$ άνω φράγμα υποδένδρου

Έστω Z_I η τιμή του μέχρι τη στιγμή εκείνη διαφορούμενου κάτω φράγματος.

Δεν απαιτείται περαιτέρω διακλάδωση στον κόμβο k αν $Z_{LP}(k) \le Z_I$

Ένας κόμβος είναι ευεργος αν είτε $Z_{LP}(k) \le Z_I$ είτε αν: το LP(k) δεν έχει λυθεί

Μέθοδος κλάδου - φράγματος

while υπάρχουν ενεργοί κόμβοι do
Επιλέξτε έναν ενεργό κόμβο j
σημειώστε τον j ως ανενεργό
Λύστε $LP(j)$: δηλώστε $x(j)$ με τιμή $Z_{LP}(j)$

Περίπτωση 1:
If $Z_{LP}(j) \leq Z_I$ then σταματάτε τη διαδικασία στον κόμβο j

Περίπτωση 2:
If $Z_{LP}(j) > Z_I$ και if $x(j)$ εφικτό για $IP(j)$
then $Z_I := Z_{LP}(j)$ σταματάτε τη διαδικασία στον
κόμβο j

Περίπτωση 3:
If $Z_{LP}(j) > Z_I$ και εάν το $x(j)$ δεν είναι εφικτό
για $IP(j)$ then επισημαίνετε τα παιδιά του
κόμβου j ως ενεργά.

endwhile.

κόμβος 1
$LP(1)$

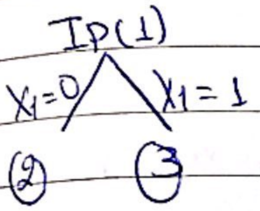
$$\max 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4$$
$$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9$$
$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1,2,3,4.$$

$Z_I = -\infty$

Βέλτιστη λύση $LP(1)$ $IP(1)$

$x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$,
$x_3 = 1$, $x_4 = 0$
$Z_{LP}(1) = 32$

Κόμβος 2



LP(2)

max $24x_1+2x_2+20x_3+4x_4$

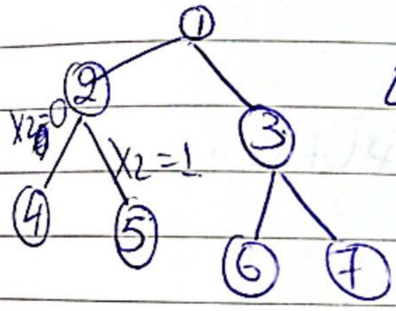
$x_1=0$, $0\le x_i\le 1$, $i=2,3,4$

$8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9$.

$Z_I=-\infty$

Βέλτιστη λύση $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=3/4$, $Z_{LP(2)}=25$

Κόμβος 3



LP(3).

max(....)

$x_1=1$, $8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9$

$0\le x_i\le 1$, $i=2,3,4$.

Βέλτιστη λύση: $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{4}$, $x_4=0$ $Z_{LP(3)}=28$

Κόμβος 4

LP(4). $\left\{\begin{array}{l} \max(\ldots) \\ x_1=0,\ x_2=0 \\ 8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9 \\ 0\le x_i\le 1,\ i=3,4 \end{array}\right\}$

$Z_I=-\infty$

Βέλτιστη λύση LP(4)

$x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=1$

$Z_{LP(4)}=24$

Επομένως σταματούμε τις διακλαδώσεις στο 4.

Κόμβος 5 LP(5)

$\left\{\begin{array}{l} \max(\ldots) \\ x_1=0,\ x_2=1 \\ 8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9 \\ 0\le x_i\le 1,\ i=3,4. \end{array}\right\}$

$Z_I=24$.

Βέλτιστη λύση LP(5

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=3/4$

$Z_{LP(5)}=25$

Κόμβος 6:

LP(6) max(.....)
$x_1=1,\ x_2=0$
$8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9$
$0\le x_i\le 1\ ,\ i=3,4$

$z_I=24$
Βέλτιστη λύση LP(6)
$x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=1/5,\ x_4=0$
$z_{LP(6)}=28$

Κόμβος 7

LP(7) max(...)
$x_1=1,\ x_2=1$
$8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9$
$0\le x_i\le 1,\ i=3,4$

$z_I=24$
Βέλτιστη λύση LP(7).
$x_1=1,\ x_2=1$
$x_3=0\ ,\ x_4=0$
$\boxed{z_{LP(7)}=26.}$

Σταματάμε τις διακλαδώσεις στο 7

Κόμβος 8

LP(8)
max(....).
$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=0$
$8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9.$
$0\le x_4\le 1$

$z_I=26$
Βέλτιστη λύση LP(8)
$x_1=0\quad x_2=1$
$x_3=0\quad x_4=1$
$z_{LP(8)}=6$

Κόμβος 9

LP(9)
max(..)
$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=1$
$8x_1+x_2+5x_3+4x_4\le 9$
$0\le x_4\le 1$

$z_I=26$
Βέλτιστη λύση LP(9)
$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=3/4$
$z_{LP(9)}=25$

Κόμβος 10

LP(10)

$\max(24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4)$

st.

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$

$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9$

$0 \leq x_4 \leq 1$

$Z_I = 26$

Βέλτιστη λύση LP(10).

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1/4$

$Z_{LP(10)} = 25$

Κόμβος 11:

LP(11)

$\max(\dots)$

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$

$8x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9$

$0 \leq x_4 \leq 1$

$Z_I = 26$ LP(11): Αδύνατο πρόβλημα

Τέλος: $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ Z_I = 26$.

μόνο 11 κόμβοι επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμ. (LP) από τους 31 εξετάστηκαν.

Για να κάνουμε πιο γρήγορη τη διαδικασία της Branch and Band

- Η επιλογή "έξυπνα" της μεταβλητής για διακλάδωση
- Η στρογγυλοποίηση
- Η καλύτερη οριοθέτηση της εφικτής περιοχής με την προσθήκη κατάλληλων ανισοτήτων

Τεχνικές επεξεργασίας:
1) Ορισμός τιμών μεταβλητών
2) Απαλοιφή περιττών περιορισμών
3) Σύσφιξη Περιορισμών

1) Ορισμός τιμών μεταβλητών.
Χρησιμοποιείται κυρίως στον δυαδικό ακέραιο προγραμματισμό όπου οι μεταβλητές απόφασης παίρνουν τιμές 0,1

π.χ) $5x_1 \leq 2$, $x_1 \in \{0,1\}$, τότε $x_1 = 0$

Για έναν περιορισμό $\leq$, η γενική διαδικασία είναι η εξής

1) Επιλέξτε τη μεταβλητή με τον μεγαλύτερο θετικό συντελεστή
2) Υπολόγισε το άθροισμα αυτού του συντελεστή και όλων των αρνητικών συντελεστών.
3) Αν το άθροισμα αυτό ξεπερνά το δεξί μέλος του περιορισμού τότε η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής απόφασης πρέπει να οριστεί 0.
4) Επανέλαβε για τη μεταβλητή απόφασης με τον αμέσως μεγαλύτερο συντελεστή.

Η διαδικασία σταματάει όταν βρεθεί η πρώτη μεταβλητή απόφασης για την οποία η τιμή δεν μπορεί να οριστεί

όμοια για $\geq$

2) Απαλοιφή περιττών περιορισμών

Εάν για οποιοδήποτε συνδυασμό των τιμών ενός περιορισμού, ο περιορισμός αυτός δεν παραβιάζεται, τότε είναι περιττός και απαλείφεται

π.χ) $x_1 + 2x_2 \le 5$, $x_1, x_2 \in \{0,1\}$

$(x_1, x_2) = (0,0)$ $0 \le 5$ ✓

$(x_1, x_2) = (0,1)$ $2 \le 5$ ✓

(x_1, x_2) $(1,0)$ $1 \le 5$ ✓

(x_1, x_2) $(1,1)$ $3 \le 5$ ✓

3) Σύσφιξη Περιορισμών:

Μείωση στην εφικτή περιοχή ώστε η βέλτιστη λύση του ακέραιου προβλήματος να συμπίπτει με αυτήν της γραμμικής χαλάρωσης, επομένως δεν απαιτείται ειδικός αλγόριθμος για την εύρεση της

Διαδικασία σύσφιξης ενός περιορισμού τύπου $\le$:

Έστω $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \le b$ ο περιορισμός

1. Υπολόγισε S = άθροισμα όλων των θετικών a_j

2. Βρες ένα οποιοδήποτε a_j, τ.ω $S < b + |a_j|$
   a) Αν δεν υπάρχει, σταμάτησε ο περιορισμός δεν μπορεί να συσφιχτεί
   b) Αν $a_j > 0$, πήγαινε βήμα 3
   c) Αν $a_j < 0$ πήγαινε βήμα 4

3. Υπολόγισε $\bar{a}_j = S - b$, $\bar{b} = S - a_j$
   Θέσε $a_j = \bar{a}_j$ και $b = \bar{b}$ Πήγαινε στο βήμα 1

4. Θέσε $a_j = b - S$ Πήγαινε στο βήμα 1.

Κυρτό Περίγραμμα:

Μικρότερο κυρτό σύνολο που καλύπτει την εφικτή περιοχή του γραμμικού προβλήματος ώστε να περιέχει όλες τις ακέραιες λύσεις.

Εάν λυθεί το LP όπου η εφικτή λύση του είναι το κυρτό περίγραμμα των ακέραιων λύσεων, τότε σίγουρα θα βρεθεί ακέραια λύση ως βέλτιστο, επειδή όλες οι κορυφές είναι ακέραιες.

Ο μέγιστος αριθμός διαμαντιών που μπορεί να μπει σε μια κινέζικη σκακιέρα με τη μέθοδο Branch and Bound θα χρειαζόταν πάνω από 3 δισ. χρόνια για να λυθεί, όμως αν προστεθούν κατάλληλα αποκοπτικά επίπεδα τότε χρειάζεται ένα μικρό κλάσμα του δευτερολέπτου για να επιλυθεί.

Εφαρμογή του Set packing Problem

Έστω D το σύνολο των διαμαντιών και $O: (d, d') \in O$ σημαίνει ότι τα διαμάντια d, d' έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο

$$x_d = \begin{cases} 1, & \text{αν το διαμάντι } d \in D \text{ επιλεγεί} \\ 0; & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$x_d + x_{d'} \leq 1$: για όλα τα $(d, d') \in O$

$0 \leq x_d \leq 1$ και x_d ακέραιος για $d \in D$.

D_c είναι τα διαμάντια που καλύπτουν την κουκίδα c

$x_d = \begin{cases} 1, & \text{αν το διαμάντι } d \in D \text{ επιλέγει} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$\max \sum_{d \in D} x_d$

$\sum_{d \in D_c} x_d + x_{d'} \leq 1$ για όλα τα $d \in D_c$

$0 \leq x_d \leq 1$

x_d ακέραιος για $d \in D$

$Z_{LP} = 24.5$

$Z_{IP} = 24$

Ο αλγόριθμος αποκοπτικών επιπέδων του Gomory

Είναι μια γενική μέθοδος προσθήκης περιορισμών στα προβλήματα Α.Π. (αποκοπτικά επίπεδα)

Τα επίπεδα αυτά προκύπτουν από έναν μόνο περιορισμό του βέλτιστου tableau της αντίστοιχης χαλάρωσης του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Θεωρούμε ΠΑΠ.

$\max(-x_1 + 2x_2)$

$-4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9$

$x_1 + x_2 + x_4 = 4$

$x_i \geq 0$, ακέραιοι

Λύνουμε τη χαλάρωση ΓΠ και η βέλτιστη λύση είναι $\left(\frac{15}{10}, \frac{25}{10}\right)$

Το οποίο έχει τελικό tableau.

B	C_b	b	P_1	P_2	P_3	P_4	θ
P_2	2	25/10	0	1	1/10	2/5	
P_1	-1	15/10	1	0	$-1/10$	3/5	
	Z	7/2	0	0	3/10	1/5	

Στο τελικό tableau επιλέγεται από τη στήλη ένα μη ακέραιο b_i (με το μεγαλύτερο δεκαδικό μέρος).

Στο παράδειγμα και τα δύο έχουν δεκαδικό μέρος $\frac{5}{10}$ επιλέγω τυχαία το b_2

Σύμφωνα με το τελικό tableau, η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα ΓΠ ικανοποιεί τη σχέση:

B	Cb	b	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	2	25/10	0	1	1/10	2/5

$$0x_1 + x_2 + \frac{1}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{25}{10}$$

Τότε προστίθεται στο πρόβλημα γραμ. προγρ. τον ακόλουθο περιορισμό:

$$0 \cdot x_1 + x_2 + \left[\frac{1}{10}\right]x_3 + \left[\frac{2}{5}\right]x_4 \leq \left[\frac{25}{10}\right] \quad \text{όπου } [\cdot]$$

δηλώνει το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος από τον αριθμό

Επειδή $\left[\frac{1}{10}\right] = 0, \left[\frac{2}{5}\right] = 0, \left[\frac{25}{10}\right] = 2$ ο

παραπάνω περιορισμός γίνεται $x_2 \leq 2$

Άρα το νέο πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι

$\max(-x_1 + 2x_2)$

$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_2 \leq 2$

$x_i \geq 0$

Το τελευταίο tableau για τη βέλτιστη λύση του νέου προβλήματος

B	Cb	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	2	2	0	1	0	0	1
P_4	0	5/4	0	0	1/4	1	-5/2
P_1	-1	3/4	1	0	-1/4	0	6/4
	Z	5/4	0	0	1/4	0	2/4.

$$x_2 + x_5 = 2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}x_3 + x_4 - \frac{5}{2}x_5 = \frac{5}{4} \quad (2)$$

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{6}{4}x_5 = \frac{3}{4} \quad (3)$$

$b_1 = 2$, $b_2 = \frac{5}{4}$, $b_3 = \frac{3}{4}$ Το μεγαλύτερο δεκαδικό μέρος το έχει το b_3

$$[1]x_1 + \left[-\frac{1}{4}\right]x_3 + \left[\frac{6}{4}\right]x_5 \leq \left[\frac{3}{4}\right]$$

$$x_1 - x_3 + x_5 \leq 0 \quad (3).$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) η ανίσωση (3) γίνεται

$$-3x_1 + 5x_2 \leq 7$$

Άρα πρέπει να λύσουμε το ΠΓΠ

$$\max -x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$-3x_1 + 5x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το νέο πρόβλημα δίνει την λύση $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. αφού είναι ακέραια είναι η βέλτιστη του ΠΑΠ ο έξυπνος συνδυασμός αποκοπτικών επιπέδων και B&B δίνουν μια καλή προσέγγιση για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού (branch and cut)